Propuesta para la implementación de accesos peatonales cubiertos en la Universidad de Ibagué

Juan Manuel Zambrano Restrepo

Facultad de Ingeniería

Ingeniería Industrial

Ibagué, 2021

Propuesta para la implementación de accesos peatonales cubiertos en la universidad de Ibagué

Juan Manuel Zambrano Restrepo

Trabajo de grado que se presenta como requisito parcial para optar al título de:

Ingeniero Industrial

Director (a):

Doctor Nelson Javier Tovar Perilla

Profesor Universidad de Ibagué

Facultad de Ingeniería

Programa Académico

Ibagué, 2021

(Dedicatoria o lema)

Este trabajo está dedicado a todas esas personas que pusieron su granito de arena y contribuyeron para que yo fuera lo que soy hoy.

Agradecimientos

Primero agradezco a Dios por darme la oportunidad de crecer como profesional y como persona, a mis padres, con especial énfasis en mi madre quien ha sabido sobrellevar muchas dificultades y por eso se ha convertido en mi modelo a seguir. Agradezco a mi director de trabajo de grado, porque a pesar de las dificultades presentadas debido a la contingencia siempre formuló diversos escenarios para que este proyecto fuera llevado a cabo y se ha destacado por una condición humana excepcional, que sabe combinar con todo el conocimiento que posee.

Agradezco a esas personas que intervinieron de manera directa o indirecta, porque gracias a ellas es que yo he llegado hasta aquí y gracias a ellas sé que llegaré más lejos, siendo un profesional íntegro y anteponiendo por sobretodo la condición humana.

Resumen

El presente trabajo estuvo orientado a tratar la problemática relacionada con la afectación en la movilidad de los integrantes de la comunidad universitaria al interior de las instalaciones de la Universidad de Ibagué, en el momento de presentarse condiciones climáticas adversas como la lluvia. En ese sentido se ha propuesto como objetivo definir una red de rutas que pudieran ser cubiertas al interior de la institución, que conecten todas las dependencias y que minimicen la distancia total como se realiza en los problemas de árbol de mínima expansión. Para dar cumplimiento a este objetivo, inicialmente, se realizó una revisión de la literatura acerca de los algoritmos relacionados con las redes, entre estos el algoritmo de Kruskal, el cual fue elegido para hallar el árbol de mínima expansión en la red de rutas de la Universidad de Ibagué. Posteriormente se formuló un modelo matemático de programación lineal entera de tipo binario con el que se pudo corroborar que lo realizado con el algoritmo de Kruskal había permitido encontrar las rutas de mínima expansión en la red, obteniendo de esta forma una solución óptima que fue tomada como base para establecer un plan de implementación para este trabajo, con el cual a largo plazo permita darle continuidad a lo realizado en esta investigación.

Palabras clave: Algoritmo de Kruskal, árbol de mínima expansión, programación lineal

Abstract

This work was focused on the threat that represents for the mobility of the university community inside the facilities of Universidad de Ibagué the extreme weather represented by precipitations. In that way it has been proposed as objective to define the routes that may be covered inside the institution, to conect all the facilities and minimize the total distance as well as it is done in the minimum spanning trees, by which to achieve this objective a review of the literature that allow to find the solution to this problem was carried out, finding Kruskal algorithm as referent to find the minimum spanning tree in the route network of the Universidad de Ibagué. Later a mathematic model was formulated based upon integer linear programming with binary variables, which aimed to prove that what was done with the application of the Kruskal algorithm had been efective to find the minimum spanning routes in the network. Having found an optimum solution it was designed an implementation plan for this work that is aimed to continue in other Works in the institution.

Keywords: Minimum spanning tree, kruskal algorithm, linear programming,

Contenido

Introducción **13**

1. Planteamiento del problema **14**
1.1 Objetivos 15
1.1.1 Objetivos específicos 15

2. Metodología **15**

3. Revisión bibliográfica **17**
3.1 Origen del algoritmo de Kruskal 17
3.2 Conceptualización a partir de la revisión 17
3.3 Clasificación por nodos: Nodos internos y externos 24
3.4 Clasificación por distancia: Distancia de Recorrido 24

4. Obtención del árbol de mínima expansión **25**
4.1 Consideraciones acerca de las Rutas 26
4.1.1 Nodos Internos 26
4.1.2 Nodos Externos 27
4.2 Aplicación del algoritmo de Kruskal 28
4.3 Modelo matemático 30
4.3.1 Variable de decisión 30
4.3.2 Función Objetivo 30
4.3.3 Restricciones del modelo 31
4.4 Resultados 32
4.5 Plan de Implementación 34
4.5.1 Fase de planificación 34
4.5.2 Caracterización de la red 34
4.5.3 Fase de Ejecución 36

5. Conclusiones y recomendaciones **36**
5.1 Conclusiones 36
5.2 Recomendaciones 37

Referencias bibliográficas **38**

Anexos **40**
Anexo A: Zona de influencia 40
Anexo B: Matriz de distancias 41
Anexo C: Ruta óptima que minimiza la distancia 42
Anexo D: Matriz resumen de las rutas conectadas 43
Anexo E: Etapa 1 45
Anexo F: Etapa 2 46
Anexo G: Etapa 3 47
Anexo H: Etapa 4 48
Anexo I: Etapa 5 49

Lista de figuras

Figura 2-1: Metodología propuesta 16

Figura 3-1: Algoritmo de Kruskal usado para obtener la distancia mínima 18

Figura 3-2: Ruta generada sin la presencia de nodos maliciosos..... 19

Figura 3-3: Ruta generada comprobando la información por cada nodo 20

Figura 3-4: Algoritmo propuesto para la detección de ciclos 21

Figura 3-5: Modelo de red inicial..... 22

Figura 3-6: Árbol de mínima expansión. 22

Figura 3-7: Red de cableado a partir de la aplicación del algoritmo de Prim. 23

Figura 3-8: Red de cableado a partir de la aplicación del algoritmo de Kruskal. 23

Figura 4-1: Conexión propuesta para la biblioteca. 26

Figura 4-2: Conexión propuesta para el (nodo 3) laboratorio de ingeniería, el (nodo 12) bloque de ingeniería y el (nodo 13) bloque 7. 26

Figura 4-3: Conexión propuesta para la Rectoría-Vicerrectoría (nodo 21) y el bloque 7 (nodo 13). 27

Figura 4-4: Conexión propuesta para el bloque de ingeniería (nodo 12) y el laboratorio de química (nodo 17). 27

Figura 4-5: Solución obtenida mediante el software Gusek 32

Lista de tablas

Tabla 4-1: Nodos (Dependencias) internos y externos de la Universidad y sus convenciones. 25

Tabla 4-2: Resumen de las iteraciones realizadas usando el algoritmo de Kruskal.29

Tabla 4-3: distancia mínima a cubrir 33

Tabla 4-4: Tabla de aforos para los diferentes nodos..... 34

Tabla 4-5: Resumen etapas de cubrimiento..... 36

Introducción

Esta investigación se basa en la temática de redes más precisamente en la optimización de redes, de esta forma en el capítulo 1 se plantea el problema, en el cual se pone en escena un contexto global y un contexto local, teniendo como premisa explicar el por qué se plantea un proyecto de este tipo, bajo el que se pretende cubrir rutas estratégicas de la Universidad de Ibagué

En el capítulo 2 se explica la metodología a seguir y se plantean tres fases mediante las cuales se va a realizar el trabajo, la primera consiste en una revisión bibliográfica, en la que se exploran más a detalle las temáticas relacionadas con el problema del árbol de mínimo recorrido con la aplicación de métodos iterativos como el algoritmo de Kruskal. La segunda fase corresponde a la parte práctica, en la que se realiza la definición de la red de la Universidad de Ibagué y se aplica el método de Kruskal basado en la revisión previa de la literatura.

También en la fase 2 de este capítulo se plantea la idea de formular un modelo que permita hallar las rutas que conecten todos los nodos y minimice la distancia. Para la formulación de este modelo se usa como principio teórico la programación lineal entera de tipo binario. Estas fases definidas previamente determinan lo realizado en el capítulo 3, 4 y 5 respectivamente.

Precisamente, como se plantea en la metodología, en el capítulo 3 se lleva a cabo la fase 1 la cual está encaminada a la búsqueda de investigaciones que permitan establecer un referente teórico cuyo enfoque permita abordar la investigación posteriormente en la parte práctica. En este capítulo se exponen 4 investigaciones, se explica la forma en la que las realizaron, los resultados obtenidos y algunos aspectos destacables de las mismas.

En el capítulo 4 se propone la definición de la red a optimizar, definiendo dos grupos con base en las características de los nodos que conforman la red, se aplica el algoritmo de Kruskal con sus respectivas iteraciones y con base en la solución obtenida a partir de este método se plantea un modelo matemático con el cual se conecten los nodos dentro de la red a optimizar teniendo en cuenta las características definidas previamente para estos.

Este modelo matemático plantea la minimización de la suma de todas las distancias y a partir de las restricciones se plantea la conectividad de todos los nodos aptos para optimización. Al obtener la ruta que minimiza la distancia se procede al plantear un plan de implementación que se conforma de una fase de planificación en la cual se resume de forma breve lo realizado y una fase propositiva que propende por la realización de un proyecto que materialice lo realizado en esta investigación

Finalmente y a manera de cierre en el capítulo 5 se plantean las conclusiones, en las que se describe de manera corta los aspectos destacables de esta investigación con base en los resultados obtenidos. Además se establecen unas recomendaciones que se basan

explícitamente en la continuidad de este proyecto por parte de grupos de investigación, lo cual permitirá ampliar las perspectivas aquí consignadas.

1. Planteamiento del problema

Actualmente en las organizaciones es común establecer unos parámetros bajo los cuales los trabajadores deben realizar su labor, dado un entorno y las condiciones que este pueda ofrecer, lo cual dentro del marco de seguridad y salud en el trabajo se conoce como organización del trabajo (Unión General de Trabajadores, s. f.) . Bajo esta premisa se puede precisar que para que un trabajador se desenvuelva de manera eficiente o para que incremente su productividad, su ambiente de trabajo debe ser el adecuado con base en unas necesidades predeterminadas y haciendo énfasis en diversos factores que pueden intervenir y afectar o beneficiar al trabajador.

Con los cambios drásticos de temperatura, las personas pueden verse expuestas a contraer enfermedades debido a que estos cambios “hacen que los mecanismos de defensa del cuerpo caigan y las enfermedades se activen, porque las bacterias y virus asociados a las vías respiratorias se mueven en ambientes fríos y húmedos” (Centro Médico Imbanaco, 2017). La exposición a estas condiciones climáticas adversas; representan un riesgo para la salud de las personas, lo cual se manifiesta de manera más agresiva en personas con problemas respiratorios. De acuerdo con lo expresado anteriormente y, pensando en el bienestar de los trabajadores se hace necesario diferenciar los ambientes donde se presenta este riesgo para realizar las adecuaciones requeridas y así, mitigar su impacto en las personas expuestas al mismo (OIT, 2020).

Según un informe de (WHO, 2013). Se afirma que el agotamiento del ozono estratosférico deja demasiado expuestos a los humanos a la radiación ultravioleta y sus efectos, lo cual a su vez genera un incremento de las temperaturas, acelerando procesos como la evaporación del agua y la posterior precipitación haciendo ambientes propicios para la proliferación de enfermedades como el dengue.

Debido al incremento de las precipitaciones como parte de una aceleración en el cambio climático se ha visto que hay una necesidad explícita de generar corredores cubiertos al interior de la Universidad de Ibagué, para disminuir el efecto que las condiciones atmosféricas puedan ejercer sobre los miembros de la comunidad universitarita, como por ejemplo las enfermedades respiratorias causadas por las precipitaciones repentinas, a propósito de la contingencia generada por la pandemia covid-19. Con base en esta necesidad la pregunta que se abordará en la siguiente investigación es: ¿Cuál es la red óptima de rutas que deberían ser cubiertas para desplazarse dentro del campus de la Universidad de Ibagué y mitigar los riesgos asociados a las condiciones climáticas adversas?

1.1 Objetivos

Determinar la red de vías a ser cubiertas mediante la modelación matemática para mejorar el tránsito de los miembros de la comunidad universitaria de la Universidad de Ibagué durante condiciones climáticas adversas.

1.1.1 Objetivos específicos

- Realizar la revisión de la literatura que permita establecer el modelo matemático que se adapte a las condiciones específicas del problema planteado.
- Caracterizar la movilidad en la Universidad de Ibagué para identificar patrones de movilidad.
- Formular y ejecutar el modelo matemático para determinar la red óptima de caminos en la Universidad de Ibagué.
- Establecer un plan de Implementación para mejorar (techar y adecuar) la red óptima de caminos en la Universidad de Ibagué.

2. Metodología

Para la realización del siguiente trabajo se desarrollaron tres fases, de las cuales la primera fase consistió en elaborar una revisión de la literatura acerca del problema del árbol de mínima expansión y sus soluciones como el algoritmo de Kruskal, usando como herramientas de búsqueda las bases de datos a las que permite acceder la Universidad de Ibagué, como lo son las bases de datos multidisciplinarias Scopus, Science Direct, o JSTOR. Usando como motores de búsqueda expresiones como “Mínimum Spanning Tree”, “MST”, “Kruskal algorithm”, los cuales hacen referencia al tipo del problema y a una solución aplicada para este tipo de problema respectivamente.

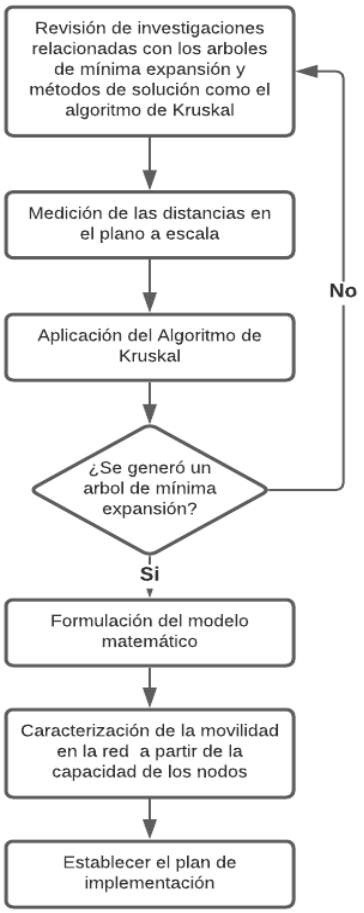
A partir de lo anterior se procedió a la segunda fase en la cual se definió el procedimiento para desarrollar el árbol de mínima expansión, el cual consistió en aplicar el algoritmo iterativo de Kruskal y posteriormente formular un modelo de programación lineal para encontrar las rutas óptimas, que generen el árbol de mínima expansión. Para llevar a cabo esta fase se recolectó la información de las distancias de la red de la universidad a partir del estudio del plano a escala de la Universidad de Ibagué, el cual fue facilitado por el personal de la institución para evitar la presencialidad y así mitigar el riesgo de contagio por Covid 19. Por esto las medidas de las distancias que se tomaron para la determinación de las rutas óptimas se realizaron con base en el plano a escala y posteriormente se realizó la conversión de las distancias de centímetros (cm) a metros (m).

Para la caracterización se analiza la capacidad de cada nodo, de forma que aquellos nodos con mayor capacidad son los que permitirán observar los patrones de movilidad. A partir de los patrones es posible definir cuáles son las rutas óptimas a cubrir que se propone priorizar en el plan de implementación. Se debe aclarar que la caracterización de la movilidad se realiza por ponderación mediante la capacidad de cada nodo analizado y en caso de no tener una capacidad definida se toma como criterio de priorización el área de mayor ponderación del nodo.

Luego de obtener la solución óptima y la caracterización se desarrolló la tercera fase que consistió en el diseño del plan de implementación que consiste en plantear las condiciones bajo las cuales se podría ejecutar el proyecto aquí expuesto.

A partir de lo anterior a continuación se puede apreciar de manera esquemática esta metodología (ver figura 1).

Figura 2-1: Metodología propuesta



Fuente: Elaboración propia

3. Revisión bibliográfica

Se realizó una revisión de la literatura relacionada con las redes específicamente basada en el problema del árbol de mínima expansión y el algoritmo de Kruskal en las bases de datos Scopus, Science Direct, JStor y se encontraron 4 artículos que fueron publicados durante la última década relacionados con las temáticas mencionadas. Estos artículos se exponen a continuación:

3.1 Origen del algoritmo de Kruskal

El algoritmo de Kruskal fue desarrollado por el matemático Joseph B. Kruskal y publicado por primera vez en el año 1956 por la sociedad dedicada a investigaciones enfocadas en las matemáticas (AMS por sus siglas en inglés) en un artículo conocido como **"On the shortest spanning subtree of a graph and the travelling salesman problem"**. Este artículo fue ideado para ser una aproximación al problema del agente viajero propuesto W.R. Hamilton en el siglo XIX, pero el impacto generado por el trabajo realizado por Kruskal hizo que se explorara una nueva aplicación en los problemas de redes que se conocen como los árboles de mínima expansión.

En (Kruskal, 1956) se plantea que para la generación de un árbol de mínima expansión a partir de un grafo G, se deben escoger los ejes de menor ponderación que aún no han sido seleccionados y ubicarlos junto a los ejes que ya fueron seleccionados hasta formar el árbol.

3.2 Conceptualización a partir de la revisión

Este algoritmo que se clasifica dentro de los algoritmos secuenciales se enfoca en ordenar los ejes de menor a mayor ponderación de un grafo G (V,E, w) dentro de un subconjunto no vacío Q del cual se borrarán los ejes de menor ponderación que conecten cada par de nodos y no generen un ciclo, para incluirlos en un subconjunto T (tree por su traducción al inglés) que se inicializa como conjunto vacío. A partir de esto se empiezan a escoger los ejes de menor ponderación del subconjunto Q y estos son incluidos en el subconjunto T que al final va a contener la red de menor ponderación con todos los ejes (Erciyes, 2018).

Este algoritmo se ha puesto en práctica en redes de transporte, como la que plantea (Erniyati & Citra, 2019) . En esta aplicación, una empresa que se dedica a transportar bienes dentro de la ciudad indonesia de Bogor la cual al ser un centro urbano que contiene una gran población, presenta dificultades en cuanto a la movilidad se refiere. Los autores plantearon a partir de la malla vial existente, la generación de una red que permita conectar todos los almacenes con el fin de minimizar la distancia y los costos asociados al transporte de productos.

En este artículo se plantea el algoritmo de Kruskal a partir de la inicialización de un conjunto G(V,E,w) que contiene todos los Vértices (V), los Ejes (E) y los respectivos pesos (Weight w por su traducción al inglés) de los ejes. Posteriormente se define un subconjunto de G denominado MST T (árbol de mínima expansión T por su traducción al español) que es el subconjunto que debe contener los ejes de menor ponderación que generan el árbol de mínima expansión. Cabe acotar que el conjunto G son los datos que ingresan al sistema y el subconjunto MST T será el resultado de las iteraciones que se producen en el sistema con el algoritmo de Kruskal

Luego se inicializan el subconjunto T que es el que almacenará los ejes de menor ponderación que conecten toda la red y el subconjunto Q que almacena todos los ejes de menor ponderación ordenados de menor a mayor. Con base en esto se define un condicional que plantea que mientras el subconjunto que contiene todos los ejes ordenados de menor a mayor (Q) no esté vacío, se tomará el punto u y se unirá al punto v si hay un tramo para recorrer entre ellos entonces el eje será seleccionado y será añadido al subconjunto T (ver figura 3.1)

Figura 3-1: Algoritmo de Kruskal usado para obtener la distancia mínima

```
Input : G = (V, E, w) undirected, weighted graph
Output : MST T = (V, E_T) of G
T ← Ø
Q ← sorted edges in nondecreasing weights of E
for all v ∈ V do
    Make-Set(v)
end for
while Q ≠ Ø do
    (u, v) ← deque(Q)
    if FindSet(u) ≠ FindSet(v) then
        E_T ← E_T ∪ {(u, v)}
        Union(u, v)
    end if
end while
```

Fuente: tomado de (Erniyati & Citra, 2019).

De este artículo se debe destacar que para su desarrollo los autores usaron como insumo las distancias desde un almacén a otro por medio de herramientas de geo localización como google maps. El resultado de esta investigación fue la disminución en un 5% de la distancia total.

Con relación a las redes, pero en el sector eléctrico (Zeng & Jiang, 2012). Proponen la generación de una ruta en la cual se transmiten datos (bits) de forma inalámbrica a partir de un método basado en el algoritmo de Kruskal y lo compara con el método de la inundación (flooding algorithm en inglés). Este trabajo propone la existencia de un nodo origen a partir del que se debe generar la ruta de mínima expansión. Este método se aplica bajo la formulación de cuatro modelos, el primero era el modelo básico de la red que

contemplaba que N nodos distribuidos en un área de tipo S y se caracteriza principalmente por tener nodos con la misma energía inicial

Para el segundo modelo se plantea que la atenuación de la transmisión de energía viene dada por un modelo de forma en el cual al incrementarse la distancia mediante la expresión d^2, se disminuía la transmisión de los datos lo que se complementaba con el tercer modelo que proponía dos ecuaciones que indicaban la energía necesitada para la transmisión de la información (en bits) cuyas ecuaciones tenían como parámetro principal la atenuación mencionada por la distancia anteriormente y adicionalmente una ecuación en la que se expresaba la energía necesitada para recibir la información, para la cual no se tiene en cuenta la distancia.

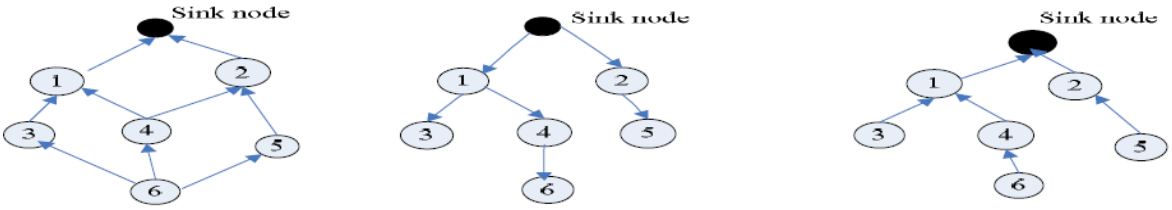
El último modelo plantea una ecuación de transmisión de energía involucrando las expresiones previas de energía de transmisión (E_T) y energía de recepción (E_R) en la que se realiza una comprobación del origen de la información y dependiendo de esto recibir o no la información, esto con el fin de evitar que un nodo malicioso robe información.

Con base en esto se construyó el algoritmo de kruskal se la siguiente forma

1) Se inicializa el conjunto RV={V_0 , V_1 ,..., V_n)
2) Si E{} Se genera la ruta óptima y el algoritmo finaliza
3) Desde la posición actual se vuelve a la búsqueda (u,v), secuencialmente en E(G) para obtener el deje de menor ponderación (u,v), u y v se mueven al conjunto RE, que corresponde al conjunto de ejes pertenecientes a la ruta óptima
4) Se retorna al paso 2.

Esta forma del algoritmo de kruskal es la más común, la variación significativa radica en las convenciones RV y RE que hacen referencia a los vértices de la ruta a generar y los ejes que hacen parte de la ruta óptima respectivamente. Las rutas se expresaron de forma resumida planteando dos escenarios, el primero no tiene en cuenta los nodos maliciosos (ver figura 3.2) mientras que el segundo escenario si contempla dicha condición (ver figura 3.3).

Figura 3-2: Ruta generada sin la presencia de nodos maliciosos

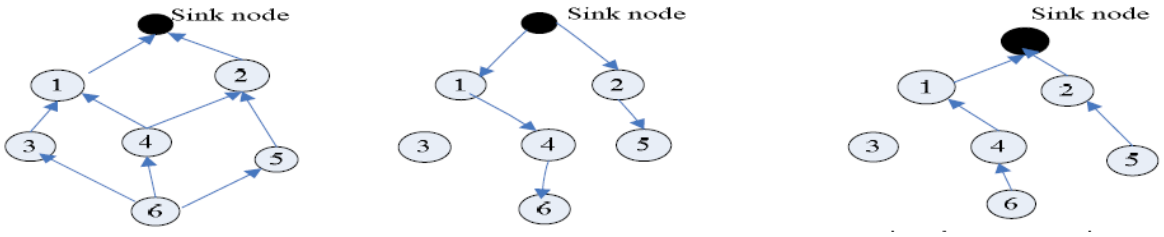


(a) (b) (c)

Fuente: Tomado de (Zeng & Jiang, 2012)

Esta red planteada como se explicó previamente no tiene en cuenta la presencia de nodos maliciosos, es decir se asume que todos los nodos tienen una procedencia confiable y no hay riesgo de comprometer la información que por esta red se transmita. Primero se establece la red inicial (a), después, a partir de esta red se plantea la red luego de la aplicación del algoritmo de Kruskal (b) y finalmente se plantea la ruta pero con el flujo de información regresando al nodo de origen (c).

Figura 3-3: Ruta generada comprobando la información por cada nodo



(a) (b) (c)

Fuente: Tomado de (Zeng & Jiang, 2012).

Como se observa en el segundo escenario al tener en cuenta la procedencia de la información (a) se detecta que el nodo 3 puede ser un nodo malicioso y que puede ser usado para robar los datos transmitidos en la red, por tanto no es incluido en la red final (b) y tampoco en la posterior transmisión de datos al origen (c). Entre los aspectos más destacables de esta investigación, se puede mencionar que en un escenario en el cual se plantea una red compuesta por 100 nodos distribuidos en un área determinada, el algoritmo propuesto tiene aproximadamente un ciclo de vida 80 veces mayor que el algoritmo de inundación. En cuanto a resultados concretos de la investigación cabe acotar que la tasa de pérdida de energía se pudo reducir en un 25%, lo cual puede ser considerado como una disminución significativa, que también como en cualquier situación, es susceptible de mejora.

A partir de las características que presentan los arboles de mínima expansión se puede observar que pueden existir diferentes métodos para la generación de estos, esto se puede observar en (Biswas, 2016) , Esta investigación en la que destacan como a partir de la detección de los ciclos en una red es posible generar un árbol de mínima expansión. Teniendo en cuenta para esto los algoritmos para la construcción de árboles de Boruvka, Prim y Kruskal.

Para la detección de ciclos se selecciona el vértice con el mayor grado dentro de la red, es decir aquel que sea conectado más veces por otros vértices, en un conjunto S compuesto por vértices que no han sido seleccionados para conformar la nueva red. La mecánica de este algoritmo gira en torno a:

Revisar si el vértice es miembro de un ciclo y si lo es se identifica el nodo más costoso que lo conecta y se borra del conjunto de ejes (ver figura 3.4)

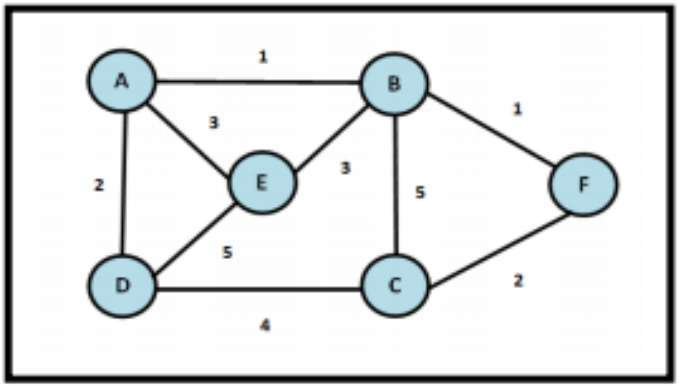
Figura 3-4: Algoritmo propuesto para la detección de ciclos

```
INPUT: A weighted undirected graph G= (V, E).
OUTPUT: A MST T of G.
MST_Algo (G, V, E, T, S)
{
   S=Φ;
   T=G;
   while(|E| > |V|-1)
   {
      SELECT a vertex u∈(V-S) whose degree is maximum
      while (TRUE)
       {
           if (u is a member of a cycle/knot in T)
           {
             SELECT the most expensive edge e_x from the  cycle/knot containing the vertex u from T;
             if(a tie occurs)
             {
                     SELECT the edge e_x whose terminal vertices have maximum degree;
             }
         Remove the most expensive edge e_x from the cycle/knot containing the vertex u from T;
          E = E-e_x;
           }
           else
           {
                S = S ∪ u ;
                break;
           }
         }
    }
 return T;
```

Fuente: Tomado de (Biswas, 2016)

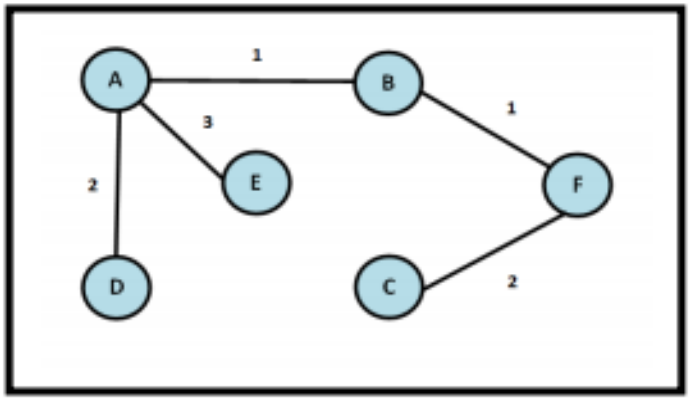
En la investigación este algoritmo fue ejecutado en una red compuesta por 6 nodos y los resultados obtenidos se muestran a continuación:

Figura 3-5: Modelo de red inicial



Fuente: Tomado de (Biswas, 2016).

Figura 3-6: Árbol de mínima expansión.

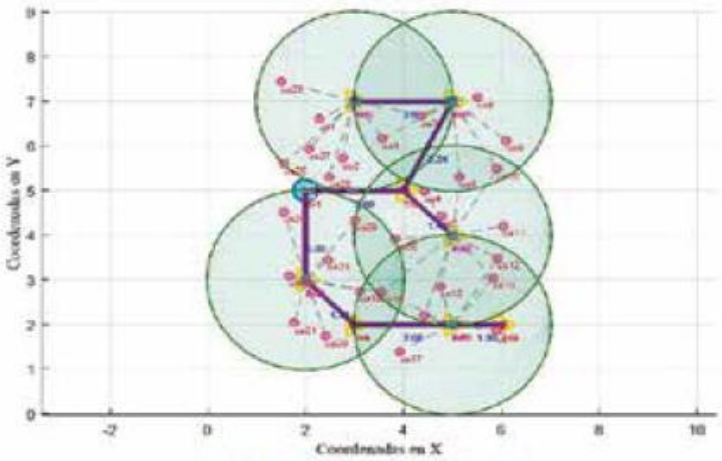


Fuente:Tomado de (Biswas, 2016).

A partir de este método su autor plantea que es posible hallar un árbol de mínima expansión eliminando los ciclos de los ejes más ponderantes cambiando el enfoque tradicional. Entre los aspectos que se tuvieron en cuenta para la formulación de este algoritmo fue el análisis del grado de los nodos, ya que entre mayor sea, es más alta la probabilidad de que el vértice en cuestión forme parte de un ciclo.

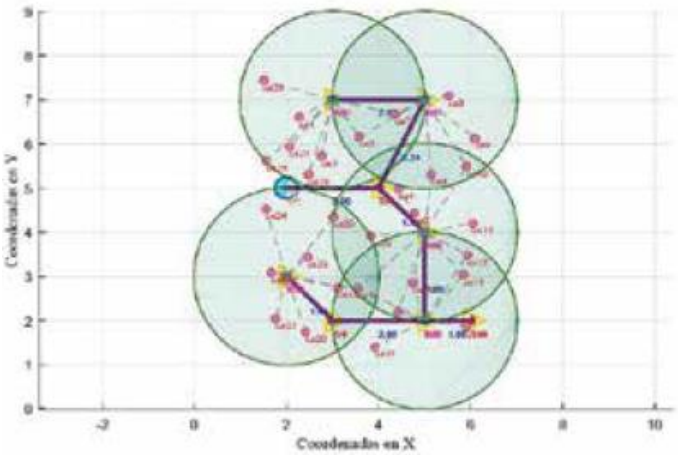
Retomando las redes de transmisión (Rodríguez-Herrera et al., 2017) desarrollan una investigación en la cual se muestra un análisis de las redes alámbricas e inalámbricas en los métodos tradicionalmente usados al aire libre, considerando la optimización en función de la capacidad, la cobertura e interferencia de un escenario georreferenciado. Se realiza una comparación de los algoritmos de Kruskal (ver figura 3-7) y de Prim (ver figura) para hallar la red de cableado que minimiza el costo basándose en la localización de los nodos para la transmisión inalámbrica.

Figura 3-7: Red de cableado a partir de la aplicación del algoritmo de Prim.



Fuente: Tomado de (Rodríguez-Herrera et al., 2017).

Figura 3-8: Red de cableado a partir de la aplicación del algoritmo de Kruskal.



Fuente: Tomado de (Rodríguez-Herrera et al., 2017).

A partir de esta investigación los autores concluyeron que con la aplicación del algoritmo de Kruskal se pudo obtener un costo de cableado de $14.064 dólares mientras que con la aplicación de el algoritmo de Prim se obtuvo un costo de cableado de $16.273 dólares, concluyendo que, aunque con el algoritmo de Kruskal se obtuvo una optimización mayor, no se debe asumir que este algoritmo siempre generará la solución más óptima.

A partir de la revisión realizada es posible concluir que en la mayoría de los casos el algoritmo de Kruskal genera mejores resultados, ya sea con la implementación de modificaciones por parte de cada autor o con la aplicación del algoritmo genérico, por

tanto se toma la decisión de implementar el algoritmo de Kruskal para hallar la red de rutas óptimas que minimizan la distancia en la Universidad de Ibagué.

Para el desarrollo del algoritmo de Kruskal se ve la necesidad de dividir tanto los nodos como las distancias de la siguiente forma:

3.3 Clasificación por nodos: Nodos internos y externos

La red de corredores que se presenta al interior de la Universidad de Ibagué tiene la particularidad de que no conecta todos los nodos, por tanto es necesario realizar una clasificación de los nodos: la primera categoría se denomina nodos internos y hace referencia a los nodos que están conectados y que hacen parte de la red inicial sobre la cual se aplica el algoritmo de Kruskal, que a su vez hacen parte de los nodos tenidos en cuenta en el modelo matemático (dentro de estos se incluyen la entrada principal, y la entrada de estudiantes entre otros).

En la otra categoría denominada nodos externos se incluyen aquellos nodos que se encuentran por fuera de la red, que no tienen conexión con esta y para los cuales solo se presenta una ruta, es decir que no se pueden optimizar en este ejercicio. Estas deben ser cubiertas obligatoriamente y hacer parte de la sumatoria final de distancias, con el fin de establecer una distancia mínima total en el interior de la Universidad de Ibagué.

3.4 Clasificación por distancia: Distancia de Recorrido

Debido a que las rutas que conectan los nodos internos son recorridas en más de una ocasión para conectar otros nodos se definen dos tipos de distancia a analizar: La distancia mínima de recorrido que no tiene en cuenta que una ruta ha sido transitada previamente para la conexión de un par de nodos y parte de la ponderación de la misma (suma de la distancia se repite en el método).

El segundo tipo de distancia se conoce como distancia mínima a cubrir y tiene en cuenta por etapas el cubrimiento realizado previamente para no repetirlo y generar la suma que minimiza las distancias dentro de la red en cuestión.

4. Obtención del árbol de mínima expansión

Con base en la revisión de la literatura se ha tomado como referencia la formulación del algoritmo de Kruskal para la generación de un árbol de mínima expansión para el cual se tuvo como variable de decisión la distancia existente entre los diferentes nodos de la Universidad, de esta forma para ejecutar el algoritmo fue necesario definir la red inicial (Ver tabla 4.1)

Tabla 4-1: Nodos (Dependencias) internos y externos de la Universidad y sus convenciones.

N°	Nodo	Tipo de nodo
1	Entrada principal	Interno
2	Casa	Interno
3	Laboratorio ingeniería	Interno
4	Biblioteca	Interno
5	Entrada Estudiantes	Interno
6	Oratorio	Interno
7	CEP	Interno
8	Proyectos especiales	Interno
9	Dirección administrativa	Interno
10	Ciencias económicas y administrativas	Interno
11	Plazoleta	Interno
12	Bloque 8-9, facultad ingeniería	Interno
13	Bloque 1-7 Registro, facultad humanidades	Interno
14	Ávaco	Externo
15	Bienestar	Externo
16	Parqueadero	Externo
17	Laboratorio química	Externo
18	Consultorio jurídico	Externo
19	Garipa (parqueadero Ambalá)	Externo
20	Gimnasio	Externo
21	Rectoría-Vicerrectoría	Externo
22	Entrada administrativos	Externo

Fuente: Elaboración propia.

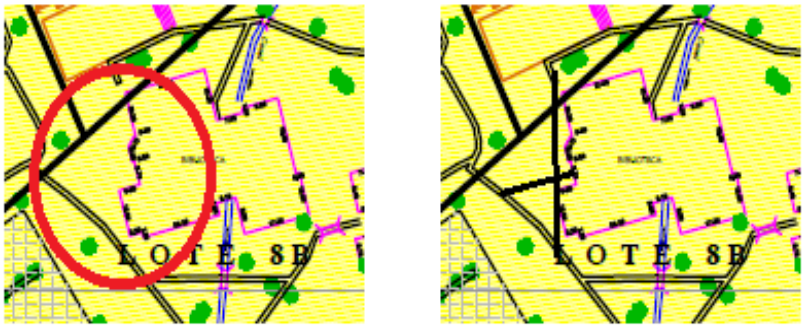
A partir de estas aclaraciones se define la zona de influencia (ver Anexo A) que se refiere a la red de nodos internos a la que se hizo referencia previamente.

4.1 Consideraciones acerca de las Rutas

4.1.1 Nodos Internos

Después de definir la zona de influencia e identificar los nodos que la conforman se procede a medir las distancias, pero se presenta una dificultad que radica en que ciertos nodos que hacen parte de la zona de influencia no tienen conexión en el plano a escala pero por el conocimiento que se tiene de la universidad es posible afirmar que estas conexiones deben ser incluidas; por tanto estas se presentan a continuación:

Figura 4-1: Conexión propuesta para la biblioteca.

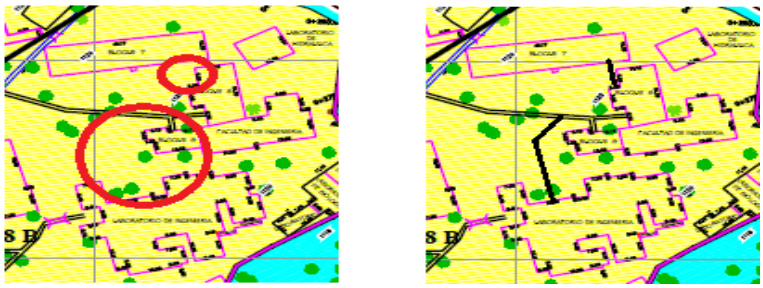


(b) Señalización de la conexión faltante **(a)** Conexión propuesta

Fuente: Plano Universidad de Ibagué.

En esta conexión es posible observar que por la parte superior es posible dirigirse al nodo 13 (Bloque 1-7) al nodo 3 (laboratorio de ingeniería) y al nodo 12 (Bloque ingeniería) y por la parte inferior esta tiene como posibilidades de conexión directa el nodo 1(entrada principal), el nodo 2 (casa) y nuevamente el nodo 3 (laboratorio ingeniería).

Figura 4-2: Conexión propuesta para el (nodo 3) laboratorio de ingeniería, el (nodo 12) bloque de ingeniería y el (nodo 13) bloque 7.



(b) Señalización de la conexión faltante (a) Conexión propuesta

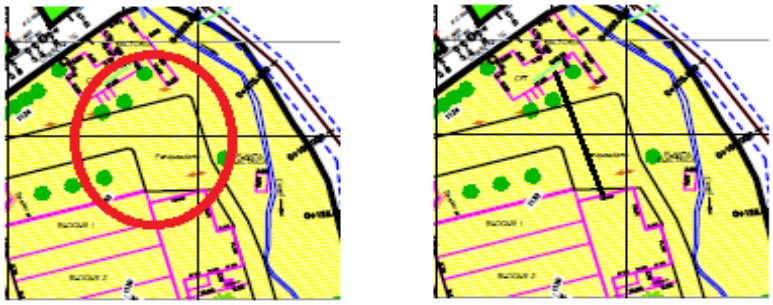
Fuente: Plano Universidad de Ibagué

Para el caso de los nodos 3, 12 y 13, se plantean las conexiones que actualmente existen pero que no son apreciables en el plano, es decir que en el plano no están señaladas estas conexiones y para el desarrollo de este trabajo académico deben ser tenidas en cuenta.

4.1.2 Nodos Externos

El paso previo es definir las rutas y si bien solo hay una ruta de conexión con estos nodos, hay nodos que no tienen esta ruta, por tanto a continuación se muestran aquellos nodos externos que pueden ser conectados con el fin de considerar todas las posibilidades de cubrimiento.

Figura 4-3: Conexión propuesta para la Rectoría-Vicerrectoría (nodo 21) y el bloque 7 (nodo 13).

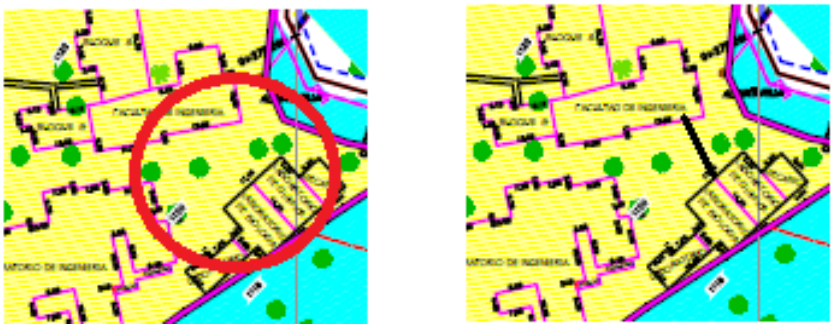


(b) Señalización de la conexión faltante

(a) Conexión propuesta

Fuente: Plano Universidad de Ibagué.

Figura 4-4: Conexión propuesta para el bloque de ingeniería (nodo 12) y el laboratorio de química (nodo 17).



(b) Señalización de la conexión faltante

(a) Conexión propuesta

Fuente: Plano Universidad de Ibagué.

Teniendo definidas las conexiones existentes en el plano y las propuestas en el mismo se procede a medir las distancias. Para este paso se debe aclarar que con el fin de mitigar el riesgo generado por la pandemia covid-19, las distancias que han sido medidas son las del plano a escala, por tanto, para efectos de la aplicación del algoritmo de Kruskal y la formulación del modelo matemático estas serán convertidas de centímetros (cm) a metros (m). Los resultados de la medición realizada se registran en la matriz de distancias (ver anexo B).

4.2 Aplicación del algoritmo de Kruskal

Para un grafo G (N,E,w) que contiene todos los nodos (N) , los ejes que conectan los nodos y las ponderaciones (w) de cada eje se aplica el algoritmo de Kruskal de la siguiente forma:

- Se crean los conjuntos N y E(u,v) .
- Se inicializa un conjunto T (vacío) que contiene el árbol de mínima expansión.
- Mientras el número de ejes sea menor al número de nodos menos 1 (E **<** n-1) entonces se debe seleccionar la arista de menor ponderación y debe ser incluida en el conjunto T, teniendo en cuenta que entre E(u,v) y E(v,u) se debe seleccionar solo una para evitar ciclos.

Siguiendo las indicaciones del procedimiento se crean los conjuntos con base en la información recabada a partir de la tabla de nodos internos y la matriz de distancias que establece los ejes que deben ser considerados.

Nodos = **{**1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13**}.**

Ejes = **{** 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 1-7, 1-8, 1-9, 1-10, 1-11, 2-1, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 2-7, 2-8, 2-9, 2-10, 2-11, 3-1, 3-2, 3-4, 3-5, 3-6, 3-7, 3-8, 3-9, 3-10, 3-11, 4-1, 4-2, 4-3, 4-5, 4-6, 4-7, 4-8, 4-9, 4-10, 4-11, 4-12, 4-13, 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-6, 5-8, 5-9, 5-10, 5-11, 6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-7, 6-8, 6-9, 6-10, 6-11, 7-1, 7-2, 7-3, 7-4, 7-5, 7-6, 7-8, 7-9, 7-10, 7-11, 8-1, 8-2, 8-3, 8-4, 8-5, 8-6, 8-7, 8-9, 8-10, 8-11, 9-1, 9-2, 9-3, 9-4, 9-5, 9-6, 9-7, 9-8, 9-10, 9-11, 10-1, 10-2, 10-3, 10-4, 10-5, 10-6, 10-7, 10-8, 10-9, 10-11, 11-1, 11-2, 11-3, 11-4, 11-5, 11-6, 11-7, 11-8, 11-9, 11-10, 12-3, 12-4, 12-13 **}.**

T= {}.

Como se puede observar en la descripción del procedimiento, se realizarán iteraciones buscando en cada una el eje con la mínima ponderación, mientras el número de ejes sea menor a la cantidad de nodos menos uno, cuando esta condición no se cumpla, es decir

que el número de ejes seleccionados para la generación del árbol sea igual o mayor al número de nodos menos 1, se deben detener las iteraciones:

$$E < n-1$$

Teniendo en cuenta lo anterior se realizan las iteraciones respectivas y el resumen de las mismas se muestra a continuación (Ver tabla 4-2):

Tabla 4-2: Resumen de las iteraciones realizadas usando el algoritmo de Kruskal.

Iteración 1 **Valor mínimo:** 1,5 m **Acumulado:** 1,5 m **T = {** 8-9 **}** E **<** n-1 **=** 1**<**13-1 **=** 1 **<** 12	**Iteración 2** **Valor mínimo:** 3 m **Acumulado**: 4 m **T = {** 8-9, 12-13 **}** E **<** n-1 **=** 2**<**13-1 **=** 2 **<** 12	**Iteración 3** **Valor mínimo:** 6,8 m **Acumulado**: 11,3 m **T = {** 8-9, 12-13, 6-7 **}** E **<** n-1 **=** 3**<**13-1 **=** 3 **<** 12
Iteración 4 **Valor mínimo:** 11,3 m **Acumulado**: 22,6 m **T = {** 8-9, 12-13, 6-7, 10-11 **}** E **<** n-1 **=** 4**<**13-1 **=** 4 **<** 12	**Iteración 5** **Valor mínimo:** 11,63 m **Acumulado**: 34,23 m **T = {** 8-9, 12-13, 6-7, 10-11, 3-12 **}** E **<** n-1 **=** 5**<**13-1 **=** 5 **<** 12	**Iteración 6** **Valor mínimo:** 12 cm **Acumulado**: 46,23 m **T = {** 8-9, 12-13, 6-7, 10-11, 3-12, 5-6 **}** E **<** n-1 **=** 6**<**13-1 **=** 6 **<** 12
Iteración 7 **Valor mínimo:** 16,9 m **Acumulado**: 63,13 m **T = {** 8-9, 12-13, 6-7, 10-11, 3-12, 5-6, 9-10 **}** E **<** n-1 **=** 7**<**13-1 **=** 7 **<** 12	**Iteración 8** **Valor mínimo:** 24 m **Acumulado**: 87,13 m **T = {** 8-9, 12-13, 6-7, 10-11, 3-12, 5-6, 9-10, 3-4 **}** E **<** n-1 **=** 8**<**13-1 **=** 8 **<** 12	**Iteración 9** **Valor mínimo:** 24,8 m **Acumulado**: 111,93 m **T = {** 8-9, 12-13, 6-7, 10-11, 3-12, 5-6, 9-10, 3-4, 2-3 **}** E **<** n-1 **=** 9**<**13-1 **=** 9 **<** 12
Iteración 10 **Valor mínimo:** 25,1 m **Acumulado**: 137 m **T = {** 8-9, 12-13, 6-7, 10-11, 3-12, 5-6, 9-10, 3-4, 2-3, 4-7 **}** E **<** n-1 **=** 10**<**13-1**=**10 **<** 12	**Iteración 11** **Valor mínimo:** 27 m **Acumulado**: 164 m **T = {** 8-9, 12-13, 6-7, 10-11, 3-12, 5-6, 9-10, 3-4, 2-3, 4-7, 7-8 **}** E **<** n-1 **=**11**<**13-1 **=**11 **<** 12	**Iteración 12** **Valor mínimo:** 46,1 m **Acumulado**: 208,5 m **T = {** 8-9, 12-13, 6-7, 10-11, 3-12, 5-6, 9-10, 3-4, 2-3, 4-7, 7-8, 1-3 **}** E **<** n-1 **=**12**<**13-1**=**12 **<** 12

Fuente: Elaboración Propia.

Al concluir la aplicación del algoritmo se verifica que se cumpla la condición previamente expuesta y se verifica que no se presenten ciclos.

Para que se forme un árbol se debe cumplir que no se formen ciclos y que la cantidad de ejes seleccionados debe ser igual a la cantidad de vértices menos 1. Condición que a pesar de que parece similar a la anteriormente expuesta es diferente, debido a que la desigualdad fue propuesta para saber en qué momento debían detenerse las iteraciones correspondientes y la igualdad, es una de las condiciones obligatorias para la formación de un árbol.

4.3 Modelo matemático

Con base en la solución inicial se procede a la formulación del modelo matemático que se vale de la programación lineal entera de tipo binario y se define de la siguiente forma:

4.3.1 Variable de decisión

Xij: Asignación de la ruta que va desde el nodo i-ésimo hasta el nodo j-ésimo.

4.3.2 Función Objetivo

La función objetivo está dada por la minimización la suma de la distancia desde el nodo i-ésimo hasta el nodo j-ésimo y viceversa.

Minimizar z = $48{,}4(X_{12}+X_{21}) + 46{,}1(X_{13}+X_{31}) + 46{,}1(X_{14}+X_{41}) + 67{,}5(X_{15}+X_{51}) + 73{,}1(X_{16}+X_{61}) + 63{,}8(X_{17}+X_{71}) + 71{,}3(X_{18}+X_{81}) + 71{,}3(X_{19}+X_{91}) + 75(X_{110}+X_{101}) + 71{,}3(X_{111}+X_{111}) + 24{,}8(X_{23}+X_{32}) + 30{,}8(X_{24}+X_{42}) + 51{,}8(X_{25}+X_{52}) + 57{,}8(X_{26}+X_{62}) + 48{,}4(X_{27}+X_{72}) + 55{,}9(X_{28}+X_{82}) + 55{,}9(X_{29}+X_{29}) + 59{,}6(X_{210}+X_{102}) + 55{,}9(X_{211}+X_{112}) + 24(X_{34}+X_{43}) + 45(X_{35}+X_{53}) + 51(X_{36}+X_{63}) + 41{,}6(X_{37}+X_{73}) + 49{,}1(X_{38}+X_{83}) + 49{,}1(X_{39}+X_{93}) + 52{,}9(X_{310}+X_{103}) + 49{,}1(X_{311}+X_{113}) + 11{,}63(X_{312}+X_{123}) + 27(X_{45}+X_{54}) + 33(X_{46}+X_{64}) + 25{,}1(X_{47}+X_{74}) + 30{,}4(X_{48}+X_{84}) + 30{,}4(X_{49}+X_{94}) + 34{,}9(X_{410}+X_{104}) + 31{,}1(X_{411}+X_{114}) + 33(X_{412}+X_{124}) + 26{,}3(X_{413}+X_{134}) + 12(X_{56}+X_{65}) + 43{,}1(X_{58}+X_{85}) + 43{,}1(X_{59}+X_{95}) + 41{,}6(X_{510}+X_{105}) + 43{,}1(X_{511}+X_{115}) + 6{,}8(X_{67}+X_{76}) + 49{,}1(X_{68}+X_{86}) + 49{,}1(X_{69}+X_{96}) + 52{,}9(X_{610}+X_{106}) + 49{,}1(X_{611}+X_{116}) + 27(X_{78}+X_{87}) + 27(X_{79}+X_{97}) + 30{,}8(X_{710}+X_{107}) + 27{,}8(X_{711}+X_{117}) + 1{,}5(X_{89}+X_{98}) + 16{,}9(X_{810}+X_{108})$

$+24(X_{811} + X_{118}) + 16{,}9(X_{910} + X_{109}) + 24(X_{911} + X_{119}) +11{,}3(X_{1011} + X_{1110})+ 3(X_{1213} + X_{1312})$

$+27{,}8(X_{219} + X_{192}) + 3{,}8(X_{1217} + X_{1712}) + 25{,}5(X_{1518} + X_{1815}) + 11{,}3(X_{2015} + X_{1520}) + 9{,}8(X_{1321} +$

$X_{2113}) + 11{,}6(X_{2213} + X_{1322})$

4.3.3 Restricciones del modelo

Asumiendo que todos los nodos deben ser conectados por lo menos una vez, como ocurre con el algoritmo de kruskal entonces se plantean restricciones en forma de igualdades con base en las posibilidades de conexión directa por cada nodo y el valor mínimo que pueden tomar estas igualdades es 1, es decir se está garantizando que cada nodo sea conectado y que la conexión con base en el criterio de optimización será la de menor ponderación.

S.a.

$X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}+X_{16}+ X_{17} +X_{18} +X_{19}+X_{110}+X_{111} =1$

$X_{21}+X_{23}+X_{24}+X_{25}+X_{26}+X_{27}+X_{28}+ X_{29} + X_{210} +X_{211} =1$

$X_{31} + X_{32} + X_{34} +X_{35} + X_{36} + X_{37} + X_{38} + X_{39} + X_{310}+ X_{311}+X_{312} =2$

$X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{45}+X_{46}+X_{47}+X_{48}+ X_{49}+X_{410}+ X_{411}+ X_{412} + X_{413} =1$

$X_{51}+X_{52}+X_{53}+X_{54}+X_{56} + X_{57}+X_{58}+ X_{59}+X_{510}+X_{511} =1$

$X_{61}+X_{62}+X_{63}+X_{64}+X_{65}+X_{67}+X_{68}+ X_{69}+X_{610}+X_{611} =1$

$X_{71}+X_{72}+X_{73}+X_{78}+ X_{79}+ X_{710}+X_{711} =1$

$X_{81}+X_{82}+X_{83}+X_{84}+X_{85}+X_{86}+X_{87} + X_{89} + X_{810} + X_{811} =1$

$X_{91}+X_{92}+X_{93}+X_{94}+ X_{95}+X_{96}+X_{97}+X_{910} + X_{911}=1$

$X_{101}+X_{102}+X_{103}+X_{104}+ X_{105} +X_{106}+X_{107}+X_{108}+X_{109}+ X_{1011} =1$

$X_{1312} + X_{133} =1$

$X_{1416} =1$

$X_{1217} =1$

$X_{1518} =1$

$X_{219}=1$

$X_{1520} =1$

X_{1321} =1

X_{1322} =1

Xij=0, cuando el eje i a j no se encuentra en la solución óptima.

Xij=1, cuando el eje i a j se encuentra en la solución óptima.

4.4 Resultados

Para la obtención de la ruta que minimiza la distancia total mientras alcanza todos los nodos fue necesario recurrir al Software de modelación matemática Gusek, el resultado de la selección de rutas óptimas se muestra a continuación:

Figura 4-5: Solución obtenida mediante el software Gusek

```
x89.val = 1
x1312.val = 1
x67.val = 1
x1011.val = 1
x312.val = 1
x56.val = 1
x47.val = 1
x34.val = 1
x23.val = 1
x78.val = 1
x13.val = 1
x910.val = 1
x219.val = 1
x1518.val = 1
x1520.val = 1
x2113.val = 1
x2213.val = 1
x1416.val = 1
x1217.val = 1
Model has been successfully processed
>Exit code: 0    Time: 0.990
```

Fuente: Software Gusek

A partir de este resultado se presenta la tabla resumen en donde con base en los resultados obtenidos en Gusek se presenta de forma más clara (Ver anexo C). Se debe recordar que el resultado obtenido hace referencia a la distancia mínima de recorrido en el caso de los nodos internos, es decir que el resultado está contemplando el paso por un tramo dentro de una ruta en más de una ocasión por lo que mediante la toma de distancia de la ruta escogida es posible hallar la distancia mínima a cubrir.

Para el cálculo de la distancia mínima a cubrir se toma la ruta del árbol de mínima expansión obtenido en Gusek y se realiza una medición en cascada, tomando un nodo eje al azar en la primera fase y restando la distancia anterior en las siguientes fases de la medición, es decir que en la fase 3 se mide la distancia y se resta de la obtenida en la fase 2. El resultado de este procedimiento se muestra a continuación:

Tabla 4-3: distancia mínima a cubrir

Etapa	Distancia a cubrir (m)
1	1,5
2	17,625
3	28,875
4	51,375
5	58,125
6	70,125
7	84
8	106,5
9	118,125
10	121,125
11	139,875
12	174,75

Fuente: elaboración propia

El paso a seguir es hallar la distancia mínima total a cubrir, para lo cual se suma la distancia mínima a cubrir para los nodos internos para la cual se obtuvo un resultado de 174,75 m y la distancia mínima a cubrir para los nodos obtenidos de los nodos externos que dio como resultado 96,63 m obteniendo una mínima de cobertura de 271, 375 m.

Con base en los resultados obtenidos y en la red generada (ver anexo D) es posible afirmar que el árbol generado a partir de los nodos internos cumple con la condición de que el número de ejes es igual al número de nodos menos 1 (E=n-1) como se puede evidenciar en tabla 4-3, donde el número de etapas en el cálculo de la distancia mínima a cubrir es igual al número de nodos generados (12 nodos). Además cabe destacar que dentro de la red de nodos internos no se generaron ciclos.

4.5 Plan de Implementación

Objetivo: Establecer una propuesta de recubrimiento, en la cual se contemplan dos fases, la primera fase es la de planificación en la cual se definen los aspectos técnicos y la segunda fase es la de ejecución, en la cual se plantean plazos para la implementación de la fase de planificación.

4.5.1 Fase de planificación

Establecer la distancia a cubrir: La distancia mínima a cubrir en la universidad de Ibagué equivale a 270,38 metros lineales, esta fase recopila todo lo realizado en la investigación, puede decirse que tiene cierta relación con lo que significa un estudio de pre-factibilidad pero esta investigación no contempla los costos, ni los aspectos técnicos que se esperan serán tenidos en cuenta en la fase de ejecución. Lo que se realizó en la fase de planificación fue aplicar un método que en definitiva es óptimo para la ejecución del recubrimiento de las rutas peatonales al interior de la universidad.

4.5.2 Caracterización de la red

La caracterización de la red tiene como objetivo establecer mediante un criterio como en este caso el aforo, la priorización de rutas, a fin de que este proyecto de cobertura pueda ser llevado a cabo por etapas críticas y así amortizar los costos en el tiempo. Aquellos nodos que por el tipo de información obtenida no pueden ser priorizados por aforo, serán priorizados posteriormente por el área. En definitiva, en cuanto a la priorización de cubrimiento (techado) de rutas el criterio principal es la mayor capacidad y el criterio secundario es la mayor área.

El procedimiento que se realiza es escoger el nodo de mayor aforo, después de que se selecciona se revisan los nodos más cercanos y se forma un grupo de nodos, cuyas rutas pueden ser cubiertas (techadas). Los nodos con sus respectivos aforos se presentan a continuación:

Tabla 4-4: Tabla de aforos para los diferentes nodos

OFICINAS O SALAS	CAPACIDAD	AREA (m^2)
Total bloque 1-7	1551	2264,98
CEP	888	1629,63
Total bloque 8 y 9	601	1339,07
Total laboratorio ingeniería	580	1543,49
Tota biblioteca y auditorio	270	1971,54
Total laboratorio química	106	398,5
Total consultorios	70	388,776
Total bienestar	35	25,52
Cafetería plazoleta	13	21,62

OFICINAS O SALAS	CAPACIDAD	AREA (m^2)
Total rectoría	0	95,74
Total proyectos esp y enfermería	0	53,92
Total facultad humanidades	0	340,848
Total area administrativa	0	222,84
Total ciencias económicas	0	415,37
Total vicerrectoría	0	42,07
Total ávaco	0	91,05
Total gimnasio	0	439
Portería estudiantes	0	23
Portería administrativos	0	5
Portería portal	0	41
Portería garipa	0	10

Fuente: Elaboración propia con base en los datos proporcionados por la dependencia de Planta física de la Universidad de Ibagué (2021)

A continuación se presentan los grupos de nodos que por etapas se deben recubrir y que representan la caracterización de la movilidad dentro de la red de la Universidad de Ibagué

Se puede observar que el bloque 1-7 (nodo 13) es el de mayor capacidad, entonces se buscan los nodos más cercanos que puedan ser conectados sin importar su capacidad para la implementación de la primera etapa que se establece de la siguiente forma:

Etapa 1: Bloque 1-7, Bloque 8-9 y facultad de ingeniería, laboratorio de ingeniería, laboratorio de química y biblioteca (nodos 13, 12, 3, 17 y 4 respectivamente) (ver anexo E).

Cabe resaltar que la capacidad combinada de estos nodos es de 3108.

Etapa 2: CEP, Capilla, Proyectos especiales y enfermería, Área administrativa, Portería estudiantes, Facultad de ciencias económicas y administrativas, Plazoleta y Biblioteca (nodos 7, 6, 8, 9, 5,10, 11 y 4 respectivamente) (ver anexo F)

En este caso se realizó solo se pueden tomar las capacidades del CEP y Biblioteca, pero a partir de la cercanía de estos con los otros nodos es posible afirmar que se presenta una concentración significativa en la movilidad en este grupo de nodos.

Etapa 3: Laboratorio ingeniería, Casona, Garipa, Portería portal (nodos 3, 2,19 y 1 respectivamente) (ver anexo G)

Etapa 4: Consultorios jurídicos y de psicología, Bienestar universitario, gimnasio, Ávaco, parqueadero (nodos 18, 15, 20, 14, 16 respectivamente) (ver anexo H)

Etapa 5: Entrada administrativos, Bloque 1-7 y Rectoría y vicerrectoría (nodos 22, 13, 21 respectivamente) (ver anexo I)

A continuación se presenta una tabla resumen de cada una de las etapas junto con el color que permite distinguir las diferentes etapas de recubrimiento.

Tabla 4-5: Resumen etapas de cubrimiento

Etapa	Nodos a cubrir	Color distintivo
1	13 - 12 - 3 - 17 - 4	Rojo
2	7 - 6 - 8 - 9 - 5 - 10 - 11 - 4	Dorado
3	3 - 2 - 19 - 1	Azul oscuro
4	18 - 15 - 20 - 14 - 16	Fucsia
5	22 - 13 - 21	Aguamarina oscuro

Fuente: Elaboración propia

4.5.3 Fase de Ejecución

Al requerir una gran inversión se plantea que se realice un cubrimiento por etapas, con los nodos correspondientes para cada etapa. Esto con el fin de realizar un avance progresivo hacia la construcción de dichos recubrimientos y que la inversión no genere un gran esfuerzo inmediato sino que se vea amortizada por estas etapas.

Además, en esta fase de ejecución la cual se espera pueda materializar este proyecto se propone conformar un grupo interdisciplinar de ingenieros y arquitectos el cual analice las posibilidades, técnicas en cuanto a materiales se refiere (ingeniería) y de diseño (arquitectura).

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

Uno de los aspectos más resaltables de esta investigación fue que se debió realizar un modelo de optimización con base en la red conexa de la universidad, lo cual permitió disminuir una parte de las rutas, para lo cual podría decirse que se logró una optimización local, es decir que por el tipo de red solo fue posible generar una ruta para lo que se denominó como la zona de influencia

A partir de la aplicación de algoritmo de Kruskal fue posible formular el modelo matemático ya que solo mediante la aplicación de este algoritmo se facilitó la distinción de los nodos a seleccionar por lo que hizo ver de manera más clara las restricciones a plantear en el modelo. Otro de los aspectos que influyó positivamente en la formulación del modelo que optimiza la distancia en la zona de influencia fue la inclusión de las conexiones que no se

encontraban en el plano pero que por el conocimiento del campus se sabía que estaban presentes y que debían ser tenidos en cuenta. Esta inclusión de los ejes permitió que más nodos fueran agregados al modelo

Como se analizó en la revisión de la literatura concerniente al problema del árbol de mínimo recorrido es posible plantear, que el algoritmo de Kruskal es un algoritmo secuencial que permite de forma dinámica hallar una ruta sin entrar en análisis complejos. Por lo cual se afirma que es un algoritmo efectivo en cuanto a la generación de árboles de mínima expansión y con base en las investigaciones en la mayoría de casos permite obtener resultados eficientes.

5.2 Recomendaciones

Uno de los aspectos que se quiso tener en cuenta para la realización de esta investigación fue el flujo de personas por los diferentes corredores que integran la universidad, pero debido a la pandemia, el flujo fue nulo y esto no fue posible. En futuros trabajos se recomienda analizar un modelo matemático multiobjetivo que combine el modelo realizado en esta investigación y un modelo basado en el flujo de personas. Esto con el ánimo de establecer otra variable de decisión que permita una optimización más significativa en cuanto a las distancias a cubrir.

Para la implementación como se mencionó con anterioridad se recomienda que mediante alguna de las modalidades de práctica que ofrece la universidad como paz y región se establezca un proyecto de tipo organizacional que reúna un equipo interdisciplinario, compuesto preferiblemente por ingenieros y arquitectos, el cual se encargue de llevar a cabo lo que en este proyecto se plantea aportando sus conocimientos en cuanto a diseño por parte de arquitectura y los conocimientos en cuanto a construcción que pueden aportar los ingenieros civiles. Este proyecto se espera que tome como base lo que aquí se ha realizado para aplicar sus conocimientos en pro de la institución y que se materialice un proyecto que al final beneficie a toda la comunidad universitaria.

Referencias bibliográficas

Biswas, P. (2016). An Efficient Greedy Minimum Spanning Tree Algorithm Based on Vertex Associative Cycle Detection Method. *Procedia Computer Science*, 7.

Centro Médico Imbanaco. (2017). Cambios bruscos de temperatura: Agudizan problemas respiratorios. *Centro Médico Imbanaco*. https://www.imbanaco.com/noticia/cambios-bruscos-temperatura-agudizan-problemas-respiratorios/

Condicionesdetrabajo.pdf. (s. f.). Recuperado 22 de septiembre de 2020, de http://portal.ugt.org/campanas/condicionesdetrabajo.pdf

Erciyes, K. (2018). *Guide to Graph Algorithms*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73235-0

Erniyati, & Citra, P. (2019). The implementation of the Kruskal algorithm for the search for the shortest path to the location of a building store in the city of Bogor. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, *621*, 012010. https://doi.org/10.1088/1757-899X/621/1/012010

Kruskal, J. B. (1956). *On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem*. 4.

Organización Internacional del Trabajo. (2020). *Seguridad y salud en el trabajo*. https://www.ilo.org/global/standards/subjects-covered-by-international-labour-standards/occupational-safety-and-health/lang--es/index.htm

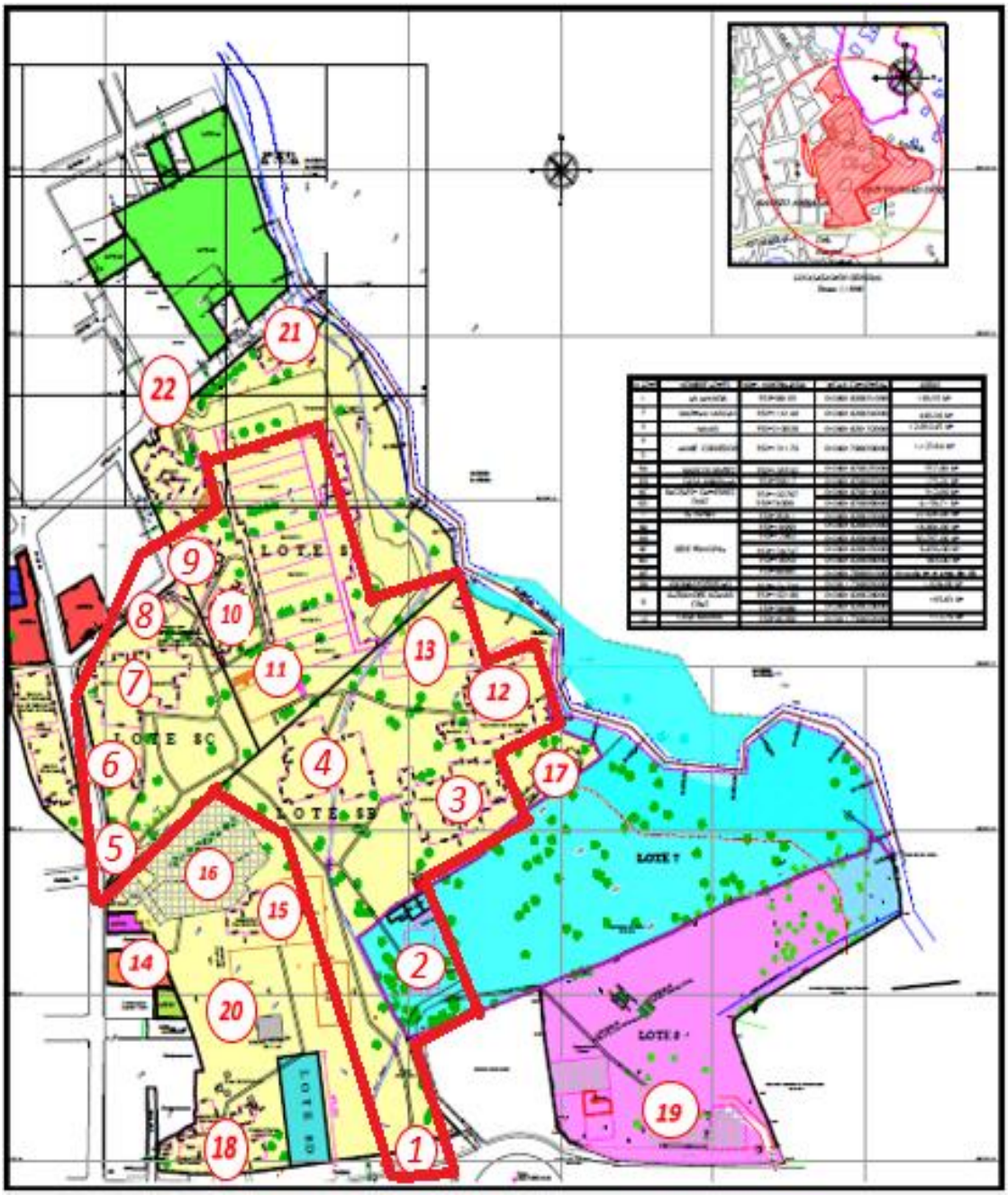
Rodríguez-Herrera, E. M., Angamarca-Guamán, M. A., & Inga-Ortega, E. M. (2017). Optimización de cobertura para lugares georreferenciados. *ITECKNE Innovación e Investigación en Ingeniería*, *14*(2), 140. https://doi.org/10.15332/iteckne.v14i2.1768

Unión General de Trabajadores. (s. f.). *Prevención de Riesgos Laborales: Condiciones de Trabajo*. http://portal.ugt.org/campanas/condicionesdetrabajo.pdf

Zeng, M., & Jiang, H. (2012). A New Security Routing Algorithm Based on MST for Wireless Sensor Network. En Z. Shi, D. Leake, & S. Vadera (Eds.), *Intelligent Information Processing VI* (Vol. 385, pp. 331-336). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-32891-6_41

Anexos

Anexo A: Zona de influencia



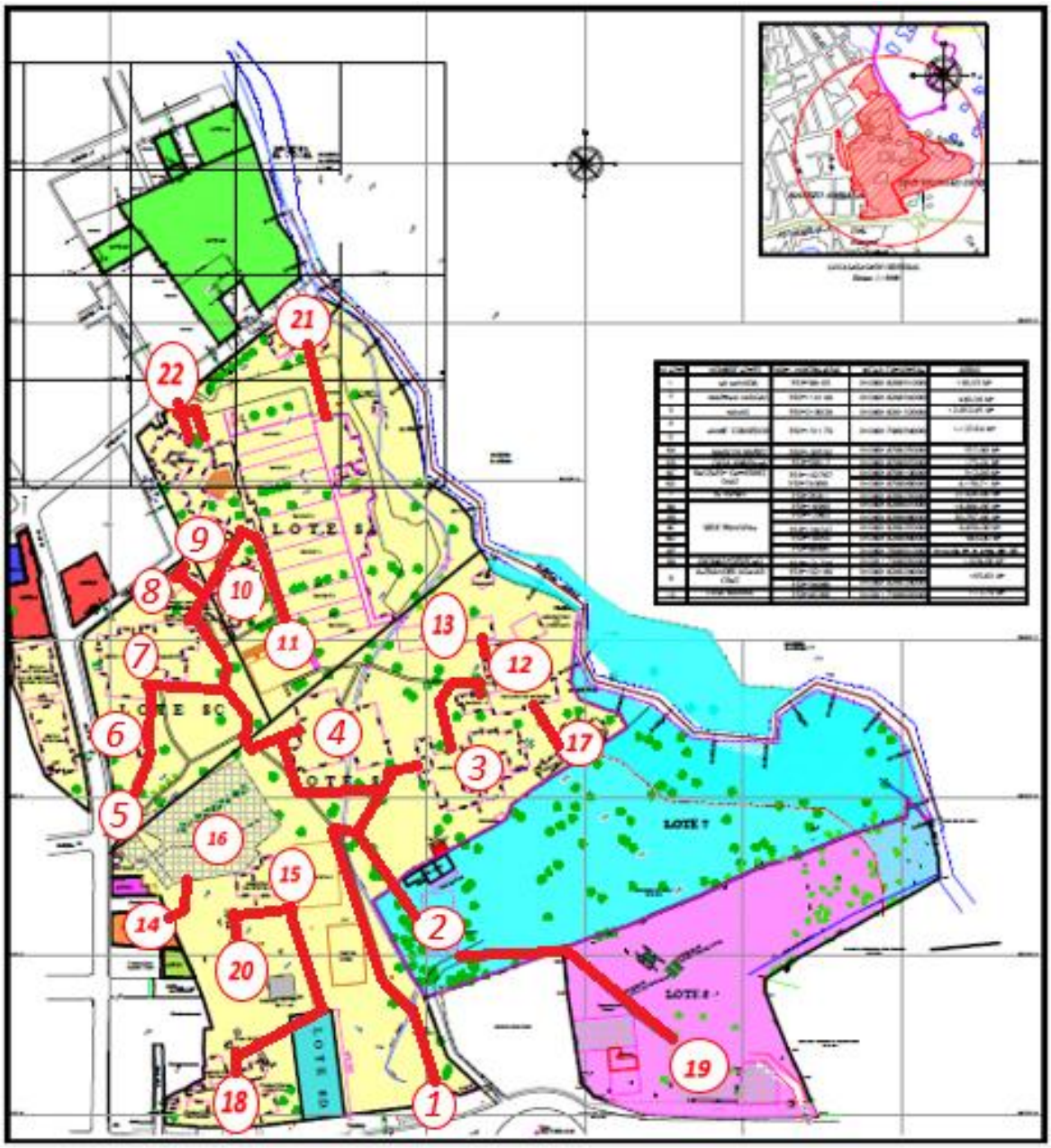
Anexo B: Matriz de distancias

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1																						
2	48,4																					
3	46,1	24,8																				
4	46,1	30,8	24,0																			
5	67,1	51,8	45,0	27,0																		
6	73,1	57,8	51,0	33,0	12,0																	
7	63,8	48,4	41,6	25,1	0,0	6,8																
8	71,3	55,9	49,1	30,4	43,1	49,1	27,0															
9	71,3	55,9	49,1	30,4	43,1	49,1	27,0	1,5														
10	75,0	59,6	52,9	34,9	41,6	52,9	30,8	16,9	16,9													
11	71,3	55,9	49,1	31,1	43,1	49,1	27,8	24,0	24,0	11,3												
12			11,63	33																		
13				26,3								3										
14																						
15																						
16														6								
17												3,8										
18															25,5							
19		27,8																				
20															11,3							
21													9,8									
22													11,6									

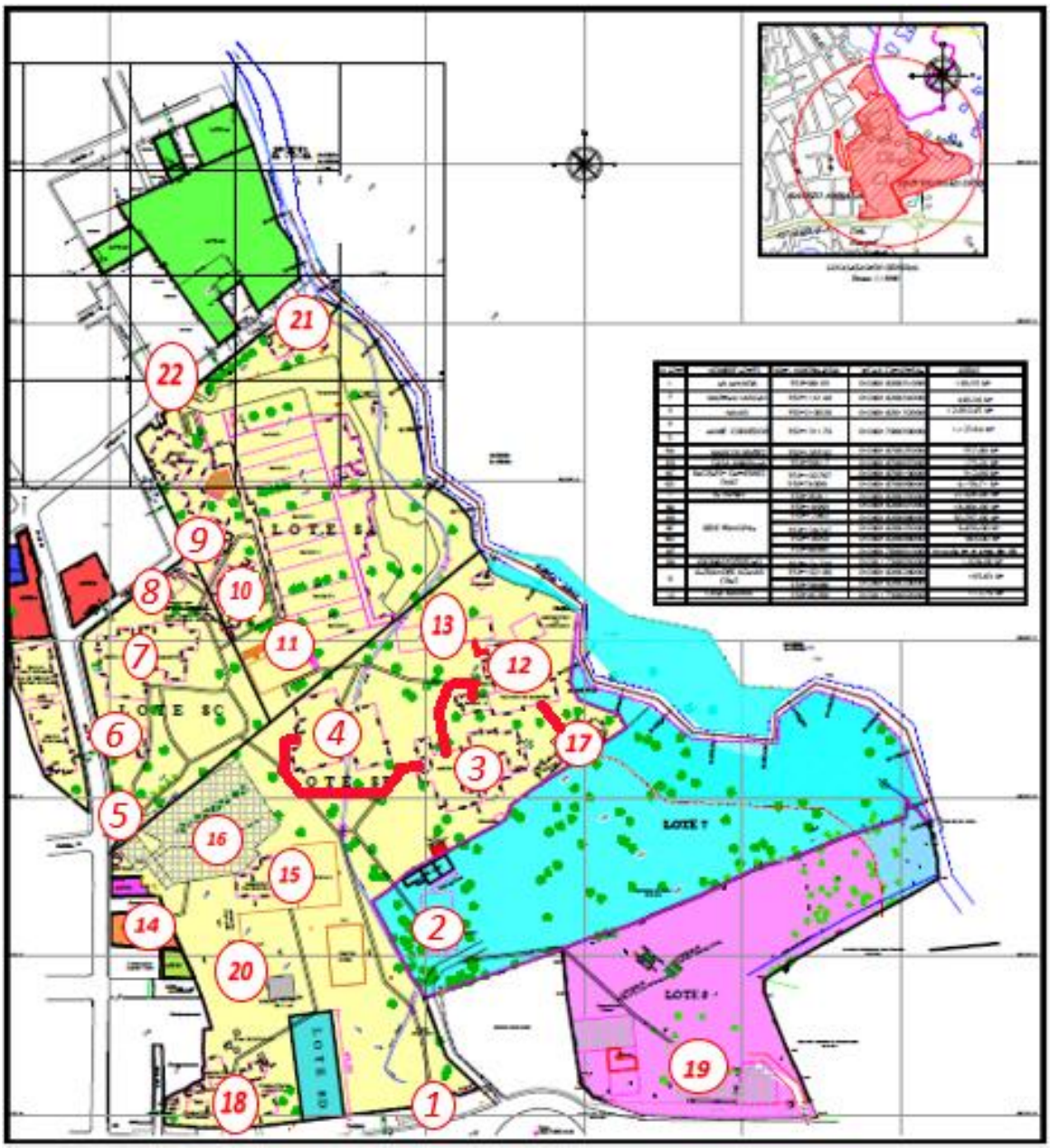
Anexo C: Matriz resumen de las rutas conectadas

Ruta	Nodo Origen		Nodo Destino		Distancia (m)
1	8	Proyectos especiales	9	Dirección administrativa	1,5
2	12	Bloque 8-9, facultad ingeniería	13	Bloque 1-7 Registro, facultad humanidades	3
3	6	Oratorio	7	CEP	6,75
4	10	Ciencias económicas y administrativas	11	Plazoleta	11,25
5	3	Laboratorio ingeniería	12	Bloque 8-9, facultad ingeniería	11,625
6	5	Entrada Estudiantes	6	Oratorio	12
7	9	Dirección administrativa	10	Ciencias económicas y administrativas	16,875
8	4	Biblioteca	7	CEP	23,625
9	3	Laboratorio ingeniería	4	Biblioteca	24
10	2	Casa	3	Laboratorio ingeniería	24,75
11	7	CEP	8	Proyectos especiales	27
12	1	Entrada principal	3	Laboratorio ingeniería	46,125
13	19	Garipa (parqueadero ambalá)	2	Casa	27,75
14	15	Bienestar	18	Consultorio jurídico	25,5
15	15	Bienestar	20	Gimnasio	11,25
16	21	Rectoría-Vicerectoría	13	Bloque 1-7 Registro, facultad humanidades	9,75
17	22	Entrada administrativos	13	Bloque 1-7 Registro, facultad humanidades	11,625
18	16	Parqueadero	14	Avaco	6
19	12	Bloque 8-9, facultad ingeniería	17	Laboratorio química	3,75

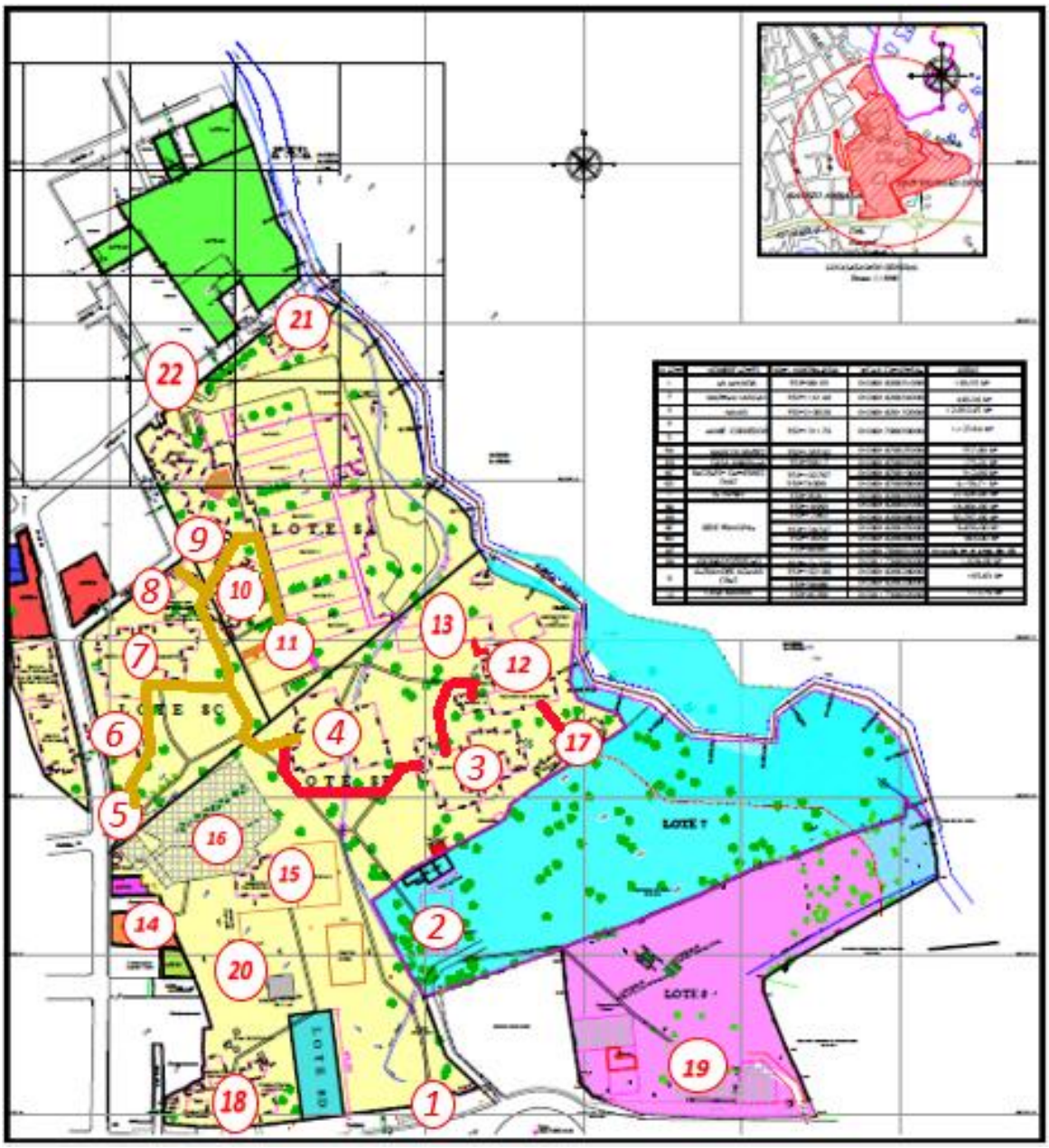
Anexo D: Ruta óptima que minimiza la distancia



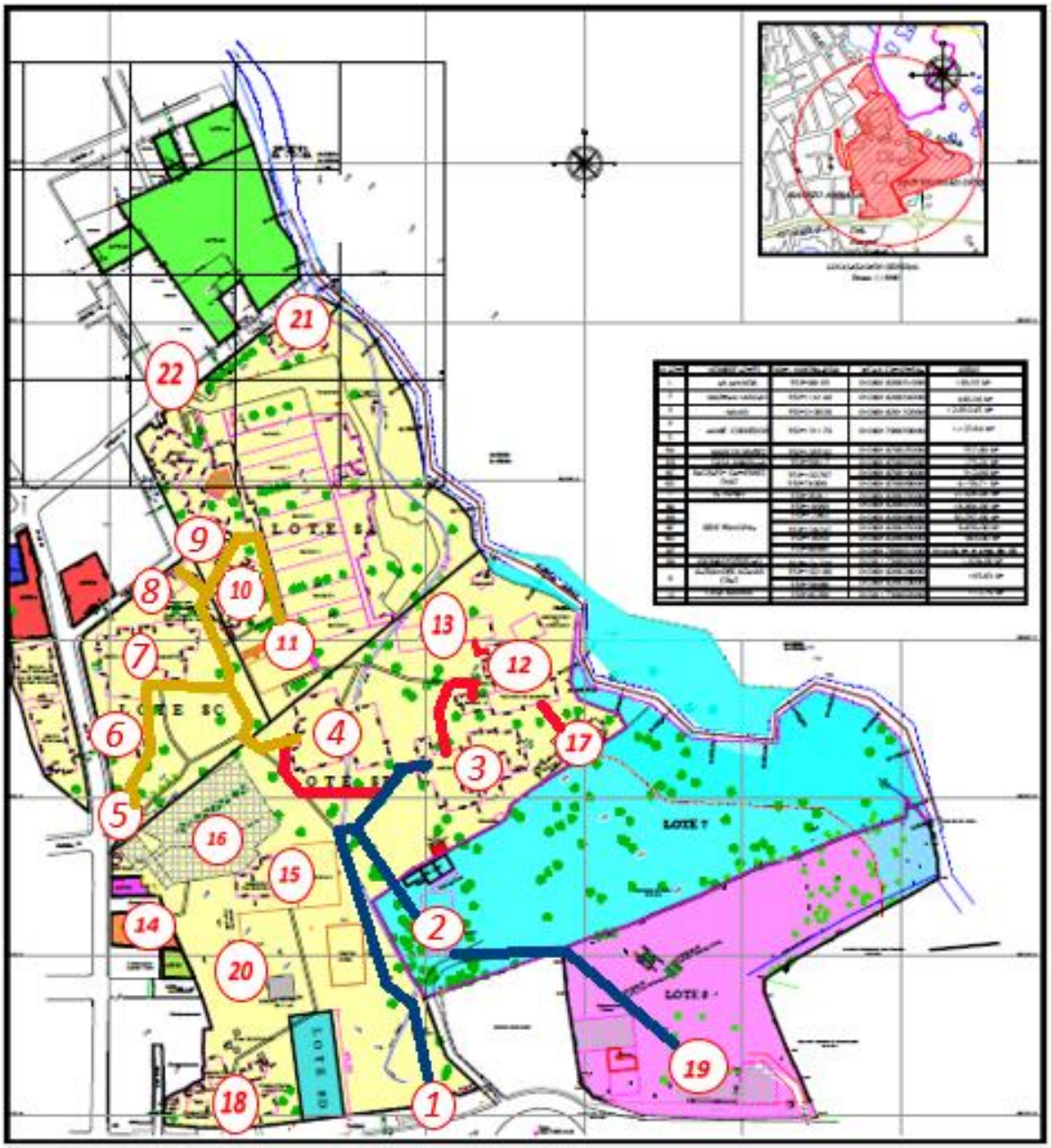
Anexo E: Etapa 1



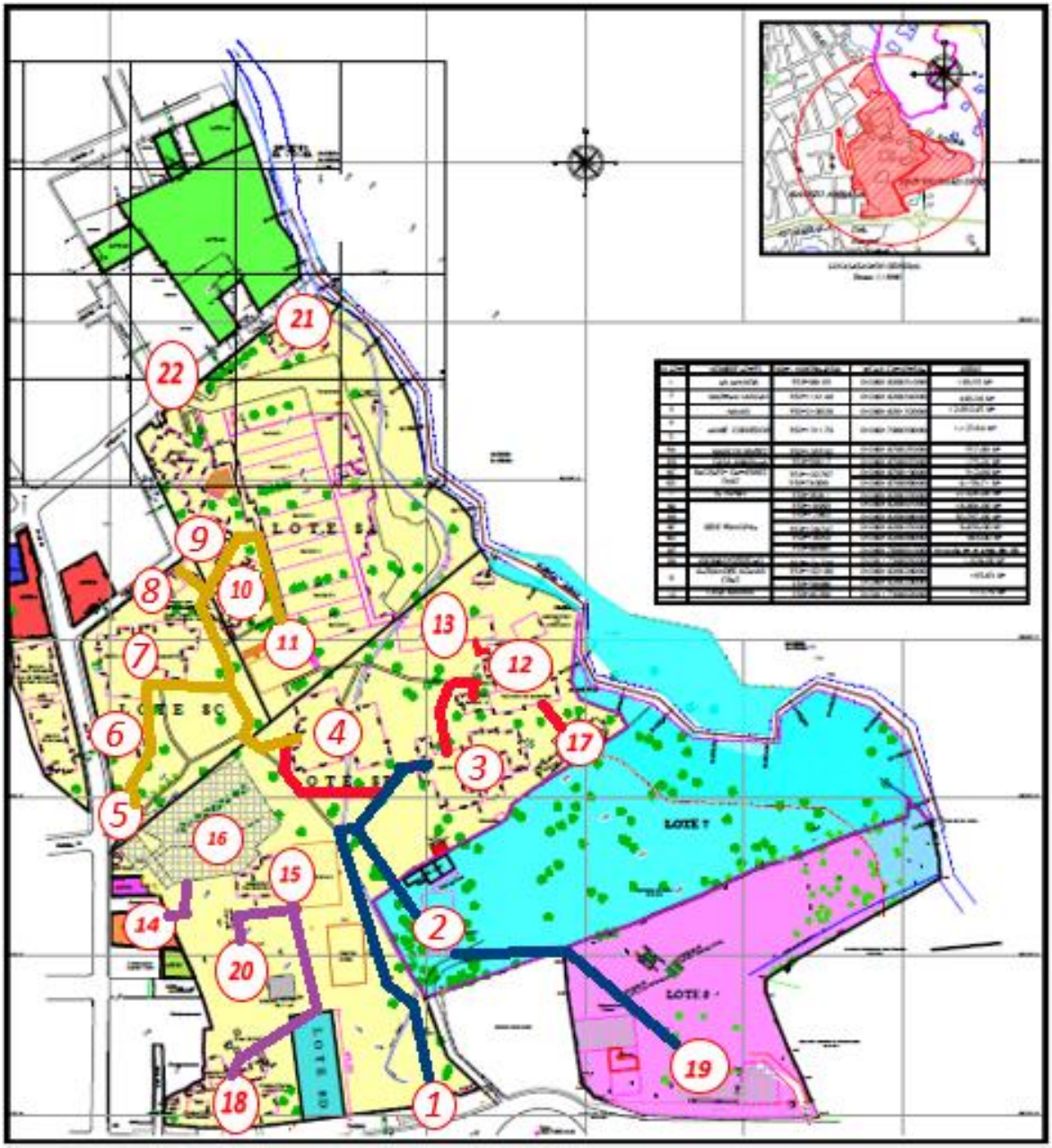
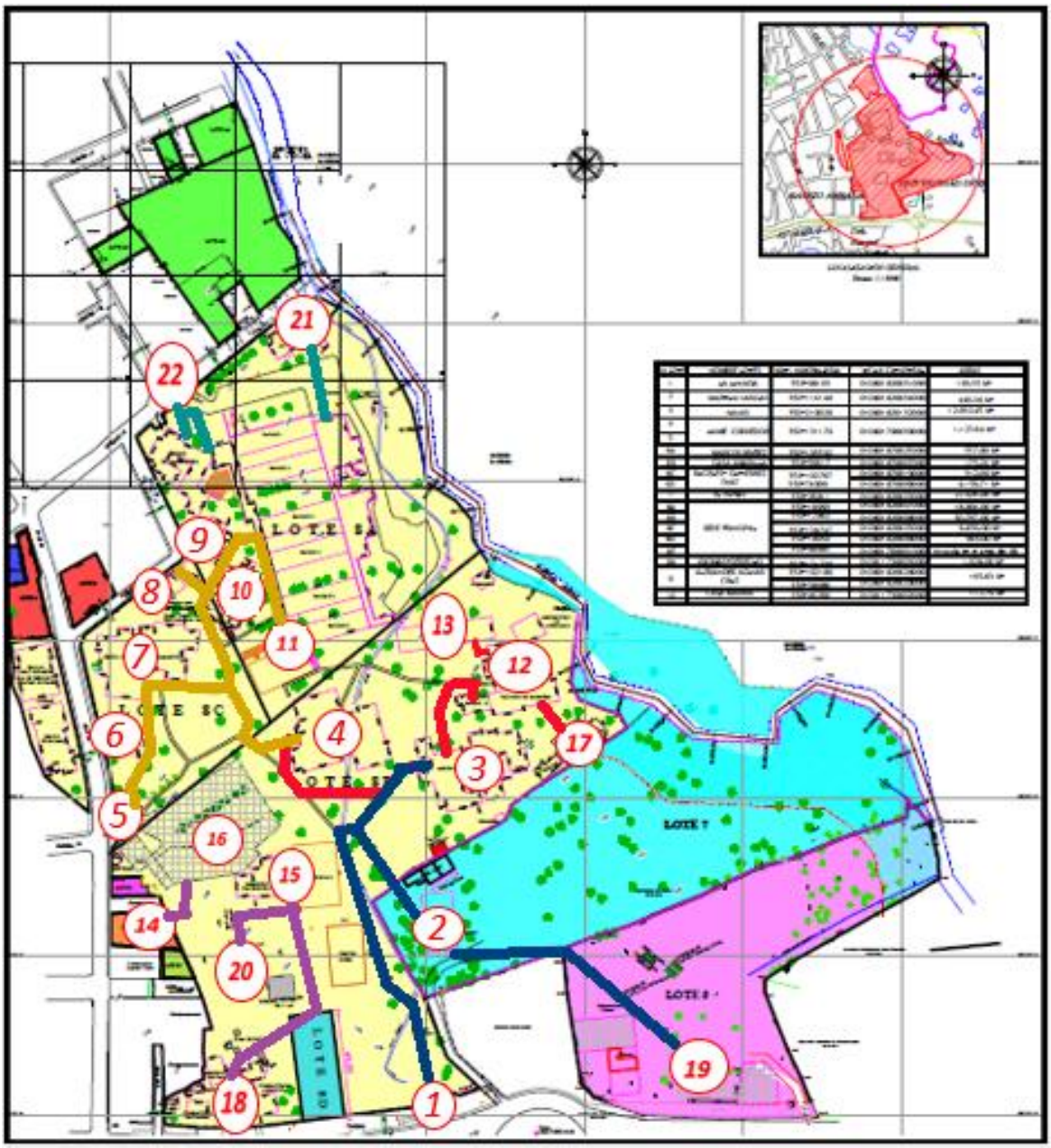
Anexo F: Etapa 2



Anexo G: Etapa 3



Anexo H: Etapa 4



Anexo I: Etapa 5